

まとめ 5

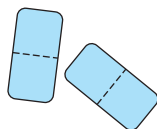
数学とパズル・ゲーム

パズルやゲームには、数学的な思考を用いることで、論理立てて取り組むことができるものがある。

【パズル・ゲームの例】

1. マスの敷き詰め

1×1 の正方形を 2 つ組合せてできる 1×2 のタイルをドミノとよぶ。与えられた図形がドミノで敷き詰め可能であることを示す場合は、敷き詰めかたを 1 つ示せばよい。



一方、敷き詰めができないことを示す場合は、可能な敷き詰めが 1 つも存在しないことを示さなければならない。

敷き詰めるとは、すき間なく埋めつくすことをいう。

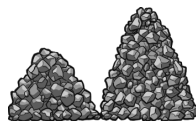
2. 石取りゲーム

小石を 1 つ目の山に m 個、2 つ目の山に n 個積み、次のルールに従って、2 人でその小石を交互に取り合う。

【ルール】

- (1) 同時に取ることができるのはどちらか 1 つの山の石のみで、1 回に 1 個以上、最大何個でも取ることができる。
- (2) 最後に石を取ったほうが勝ちである。

このようなゲームを、2 山石取りゲーム (m, n) ということとする。



このルールは一例である。

山を次のように段に分けて考えることもある。

1 段目 ●●●●●…
2 段目 ●●●●●…

【先手必勝・後手必勝】

後手がどのような手を選んだとしても、それに対して先手がうまく手を選択することで最終的に先手が必ず勝つことができるとき、そのゲームを先手必勝という。

同様に、先手がどのような手を選んだとしても、後手がうまく手を選択することで最終的に後手が必ず勝つことができるとき、そのゲームを後手必勝という。

先手の第一手も大切である。

いくら先手必勝でも、選択する手を間違えると勝てない。

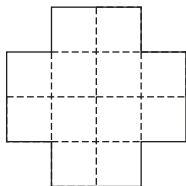
Check!

**

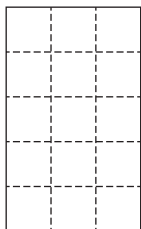
28

次の(1)~(3)の図形は、 2×1 のドミノで敷き詰められるかどうか、それぞれ答えよ。

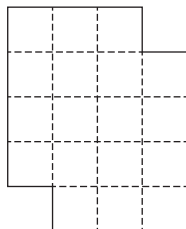
(1)



(2)



(3)

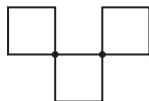


**

29

命題「ある図形のマス数が偶数個あるならば、その図形は 2×1 のドミノで敷き詰め可能である」は成り立つか答えよ。

ただし、ある図形のすべてのマスは必ず他のいずれかのマスと辺で接しているものとし、右の図のように頂点でのみ接しているマスはないものとする。

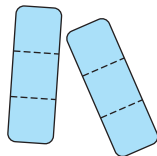


**

30

右の図のような 1×1 の正方形を直線状に3つ組合せてできる 3×1 のタイルをドミノとよぶことにする。

命題「与えられた図形がドミノで敷き詰め可能であるならば、その図形のマス数は3の倍数である」は成り立つか答えよ。



**

31

2山石取りゲーム(2, 2)について、先手必勝か後手必勝かを答えよ。

**

32

2山石取りゲーム(5, 7)について、先手必勝か後手必勝かを答えよ。

Think

例題

290

虫食い算

右の(ア)～(ケ)の空欄に1ずつ1～9の数字をすべて入れて、3つの式が成り立つようにしたい。

$$\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}} = \boxed{\text{ウ}}$$

$$\boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}} = \boxed{\text{カ}}$$

まだどの空欄にも数字が入っていない段階で、空欄(ケ)に入る可能性がある数字の候補を1～9の中からすべて選べ。

$$\boxed{\text{キ}} \times \boxed{\text{ク}} = \boxed{\text{ケ}}$$

考え方

具体的な数字を入れて考えてみる。

たとえば、(ケ)に1が入ると考えてみると、

1以外の1～9の中の2つの数を掛けて1になるものはない。
つまり、1は(ケ)には入らない。

次に2を考えてみると、これも

2以外の1～9の中の2つの数を掛けて2になるものはない。

このことから、1～9の数を2つの数の積で表してみると、(ケ)に入る候補の数字を選ぶことができそうである。

$$1 = 1 \times 1$$

$$2 = 2 \times 1$$

解答

1～9の数のうち、2、3、5、7は素数であるから、(ケ)には入らない。

残りの数を考えると、

$$4 = 1 \times 4 = 2 \times 2,$$

$$6 = 2 \times 3,$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2 \times 4,$$

$$9 = 1 \times 9 = 3 \times 3$$

となり、その数以外の1～9のうちの2数の積で表すことができるのは、6と8である。

よって、求める数は 6と8

素数 p を掛け算で表すと、

$$1 \times p = p$$

となり、同じ数字 p を2回使ってしまう。

他の空欄にも数字をあてはめて、確認するとよい。

【注】例題290では、どの空欄にも数字が入っていない段階で考えているが、空欄に数字を入れていくことで、候補となる数字は絞られていく。

練習
290

**

例題290において、まだどの空欄にも数字が入っていない段階で、数字の「9」が入る可能性がある空欄の候補を(ア)～(ケ)の中からすべて選び、その理由を述べよ。

Think

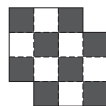
例題

291

敷き詰め問題

恵さんと純さんがある本を読みながら次のような会話をしている。

与えられた図形が 2×1 のドミノで敷き詰め可能かを判定するには、次のような方法がある。



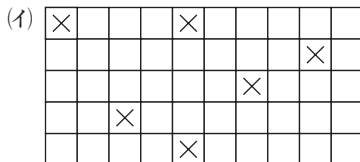
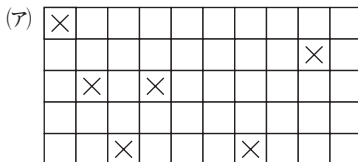
右の図のように、図形のすべてのマスをもとと黒の2色で交互に色分けする。ここにドミノをどのように置いたとしても、そのドミノは白と黒のマスを1つずつ覆うから、ドミノが敷き詰められたとすると、白と黒のマスの数は一致する。

恵：この敷き詰め問題の考え方は面白いね。

純：タイルを白黒交互に塗って判定するというのは知らなかったよ。

恵：この考え方を使ったら、次の問題も解くことができるかな？

【問題】 1×1 の正方形を2つつなげたドミノをDとする。Dが十分多くあるとすると、次の(ア)、(イ)の図形はDで敷き詰められるか。Dは×印のついたところには置けず、縦または横にしか置くことができない。



純：この本のように白黒交互（市松模様）に塗ってみて、Dを置いてみると、縦、横どのように置いても共通の特徴があるね。(ウ)これを利用してみよう。

恵：なるほど。×印の数が同じでも、敷き詰められるかどうかは異なるんだね。

純：どのような条件だったら敷き詰められるか考えてみよう。

恵：白と黒の数が同じになるとよさそうだけど…

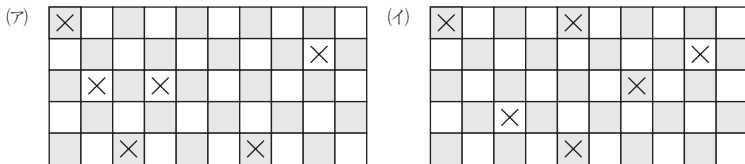
純：白と黒が同じ数でも敷き詰められない場合(エ)もありそうだね。

恵：本当だね。白と黒が同数であってもできない場合があるということは、白と黒が同じ数になるのは、敷き詰められるための（オ）条件ということになるね。

この会話を読んで、次の問いに答えよ。

- (1) 下線部(ウ)の考えを用いて、(ア)と(イ)が敷き詰められるか、理由とともに答え、敷き詰められるときは例を上げよ。
- (2) 下線部(エ)の場合の例を、×印が6個の場合について1つ挙げよ。
- (3) (オ)に当てはまる語句を答えよ。

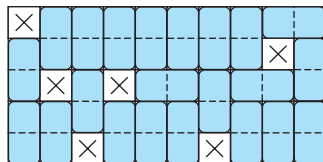
考え方 問題文の図を市松模様で塗ってみる。



黒く塗った部分と白のままの部分と×印の位置に着目してみる。

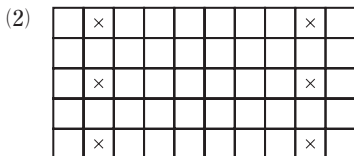
解答 (1) (ア)と(イ)の図形を市松模様で塗り分ける。□と■はそれぞれ25個ずつあり、ドミノは縦、横のどのように置いても□と■を1個ずつ覆う。

- (ア) ×印は□に3個、■に3個なので、残りの□と■の数は同じであるから、敷き詰められる可能性がある。
実際に敷き詰めると右の図のようになるから、(ア)はドミノで敷き詰められる。



◀ 敷き詰め例の1例

- (イ) ×印は□に2個、■に4個なので、残りの□と■の数は□の数が2個多い。よって、(イ)はドミノで敷き詰められない。



◀ ×の置き方の1例

- (3) (1), (2)より、□と■の数が異なるとドミノを敷き詰めることはできない。すなわち、ドミノを敷き詰められるときは□と■の数が同じであるが、□と■の数が同じであっても敷き詰められるとは限らない。

◀ ある命題が真であるとき、その命題の対偶も真である。

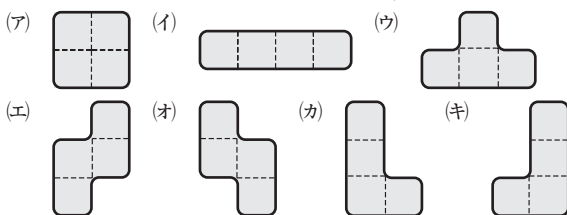
よって、白と黒が同じ数になるのは、敷き詰められるための必要条件である。

◀ $p \implies q$ が真ならば、 q は p であるための必要条件

練習
291

**

1 辺の長さが1の正方形を4つ用いて、次の7種類の図形を作る。



これらの図形のうち6種類を、回転させることを許して使うと、 3×8 の長方形を敷き詰めることができる。

- (1) (ア)~(キ)の中で使わない図形を1つ答えよ。

- (2) (1)で答えた図形以外を少なくとも1回用いて 3×8 の長方形を敷き詰めよ。

Think

例題 292 石取りゲーム

A, B の 2 人が次のゲームを行う。

初期状態として、台の上に n 個の石が置いてある。最初に A, 次に B の順で交互に、台から 1 個以上の石を取り除いていく。ただし、一度に取り除く個数は自然数の 2 乗でなければならない。台の上に石がない状態にした方を勝者として、そこでゲームは終了する。

このゲームが先手必勝であるとは、A が自分の番で取り除く石の個数を適切に選択していけば、B がいかなる選択を行っても、必ず A が勝利できることとする。同様に、このゲームが後手必勝であるとは、B が自分の番で適切に選択を行っていけば、A がいかなる選択を行っても必ず B が勝利できるものとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) どの自然数 n に対しても、このゲームは先手必勝または後手必勝のいずれか一方であることを示せ。
- (2) $n=456$ のとき、このゲームは先手必勝であることを示せ。

(京都大・改)

考え方

ルールを正確に把握し、手番のときに選択できる行動は何なのか、またそのすべての選択肢について、どのような状態で相手に手番を渡すことになるのかを考える。

まず、ルールを正確に把握すると、

- ・ A が先手, B が後手
- ・ 一度に取り除く個数が自然数の 2 乗でなければならない
- ・ 台の上に石がない状態にした方が勝ち (最後に石を取った方が勝ち)

ということである。

- (1) どのような条件 P に対しても、 P または \bar{P} のいずれか一方が成り立つ。
「先手必勝である」という条件を P とし、その否定 \bar{P} が「後手必勝である」という関係であれば、題意を満たす。
- (2) まず、A が 1 回目で取り除く個数が大きい方から、つまり、残る石の個数が小さく、以降の場合分けが少なくなる場合から考えてみる。
先手必勝を示すには、後手のすべての手に対して、先手が適切な手を選択することで必ず勝てることを示せばよい。

解答

- (1) 「先手必勝である」を P とすると、問題文中の定義より、その否定 \bar{P} は、「A がいかなる選択を行っても、B が適切に選択を行っていけば、A が勝利できない」……①

となる。石は必ずなくなり、勝者が決まる。

つまり、「A が勝利できない」ときは「B が勝利する」ときである。

よって、①の「A が勝利できない」を「B が勝利できる」に置き換えると、問題の「後手必勝」の定義と一致するので、「先手必勝」の否定 \bar{P} は「後手必勝」となる。

したがって、どの自然数 n に対しても、このゲームは先手必勝または後手必勝のいずれか一方である。

後手必勝の否定を同様に考えて、先手必勝になることを導いてもよい。
つねに P または \bar{P} のいずれか一方が成り立つ。
「 P または \bar{P} 」は真、
「 P か \bar{P} 」は偽

- (2) まず、Aが441個取り除くと残りは15個となる。
このとき、次にBが取り除ける個数は9, 4, 1のいずれかである。

$$441 = 21^2$$

残りの個数が少なければ、調べる場合分けも少なくなる。

- (i) Bが9個取り除く場合
残りは6個で、次にAが4個取り除くと、残りは2個。
この後、B, Aが1個ずつ取り除いて、Aが勝利。
- (ii) Bが4個取り除く場合
残りは11個で、次にAが9個取り除くと、残りは2個。
この後、B, Aが1個ずつ取り除いて、Aが勝利。
- (iii) Bが1個取り除く場合
残りは14個で、次にAが9個取り除くと、残りは5個。
次にBが取り除ける個数は4, 1のいずれかであるが、Bが取り除いた後の残りの個数はそれぞれ1, 4となり、次にAが残りすべてを取り除いて、Aが勝利。
したがって、 $n=456$ のとき、先手必勝である。

Focus

後手のすべての選択肢に対して、先手のある選択肢で先手が必勝となるなら、そのゲームは先手必勝
先手のすべての選択肢に対して、後手のある選択肢で後手が必勝となるなら、そのゲームは後手必勝

【注】例題 292 (1)は数学Bで学習する数学的帰納法を用いて、次のように示すこともできる。
証明) n を自然数として、数学的帰納法で示す。

- (i) $n=1$ のとき、Aが1個の石を取り除いて必ず勝利するので、先手必勝である。
(ii) 2以上の整数 k に対して、 $1 \leq n \leq k-1$ のとき、先手必勝または後手必勝のいずれか一方であると仮定して、 $n=k$ のときのゲームについて考える。

ℓ を自然数とすると、 $k=\ell^2$ の場合、Aが k 個すべてを取り除いて勝利できるので、先手必勝である。

$k \neq \ell^2$ の場合、Aの取り除く個数の選択肢のいずれもAが取り除いた後の石の個数は $k-1$ 以下である。つまり、仮定より、Aが石を取り除いた後は先手必勝または後手必勝の状態でBの手番となる。

Aの選択肢のいずれかで後手必勝の状態でBの手番となるならば、Aはその選択肢を選択すればBがどう選択してもAが勝利できるので、先手必勝である。

一方、そうでない、つまり、Aの選択肢のすべてで先手必勝の状態でBの手番となるならば、Aがどう選択してもBが勝利できるので、後手必勝である。

つまり、 $n=k$ のとき、先手必勝または後手必勝のいずれか一方である。

以上、(i), (ii)より、任意の自然数 n に対して、このゲームは先手必勝または後手必勝のいずれか一方である。

練習 292

白石 180 個と黒石 181 個の合わせて 361 個の碁石が横に 1 列に並んでいる。碁石がどのように並んでも、次の条件を満たす黒の碁石が少なくとも 1 つあることを示せ。その黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと、残りは白石と黒石が同数となる。ただし、碁石が 1 つも残らない場合も同数とみなす。

(東京大)

Column コラム

「無限に多く存在することの証明」

例題292には続きがあり、実際の入試問題では、次の問いが③として追加されている。

このゲームが後手必勝となる n が無限に多く存在することを示せ。

この問題のように無限に多く存在することを証明するにはどうしたらよいのだろうか。

「無限に多く」なので条件を満たすものを数え上げて示すことはできない。では、「無限に多く」とはどういうことか。

どんなに大きい自然数 N をとったとしても、その個数は N より大きいということである。つまり、どんなに大きい自然数 N をとって、その個数が N 個であると仮定しても、その個数は N より大きいという矛盾が導かれるということである。このように考えると、無限に多く存在することの証明は背理法を用いると良さそうである。

【証明】

このゲームが後手必勝となる n が有限であると仮定する。

その中の最大の n を N とおく。

$n = (N+1)^2 - 1$ のとき、 $n > N$ であるから、このゲームは先手必勝である。

一方、このときAが最初に取り除ける個数は N^2 以下であり、いずれの場合も残りの個数 n' は、

$$n' \geq (N+1)^2 - 1 - N^2 = 2N > N$$

となる。

よって、いずれの場合も先手必勝の状態でBの番となるが、このゲームは後手必勝である。つまり、例題292(1)で示した先手必勝または後手必勝のいずれか一方であることに矛盾する。

したがって、このゲームが後手必勝となる n は無限に多く存在する。

Column コラム

「石取りゲームの必勝法」

606ページで紹介した石取りゲームについて、必勝法を数学的に考えてみよう。ここでは、山の数をも k として、 $k=1, 2, 3$ の場合について考えてみることにする。

○ $k=1$ の場合

山の数 k が 1 の場合である。これは、**先手がすべての石を取る**と必ず勝てるので、「先手必勝」である。

○ $k=2$ の場合

山の数 k が 2 の場合である。2 つの山に、それぞれ m, n 個あるとする。

ここでのポイントは、**2 つの山の石の数が同じかどうか**である。

2 つの山の石の個数が同数であれば、先手がどのように石を取っても、2 つの山の石の個数は異なる状況になる。一方、後手は必ず 2 つの石の数を同数にできる。この手順を繰り返せば、後手は最後の石を取ることができる。

2 つの山の石の個数が異なる場合、先手は最初に、2 つの山の石の個数が同数になるようにとれば、後手はつねに 2 山の石が同数の状態で取らなければならない。つまり、先手は必ず最後の石を取ることができる。

以上より、

$m=n$ のとき、後手必勝 (後手はつねに 2 つの山を同数にできる)

$m \neq n$ のとき、先手必勝 (先手はつねに 2 つの山を同数にできる)

○ $k=3$ の場合

山の数 k が 3 の場合である。3 つの山に、それぞれ ℓ, m, n 個とする。

$k=2$ のときの形、つまり、 $(0, n, n)$ や $(n, 0, n)$ のような山の形にして、相手の番にすることができれば、必ず勝てる。

山の状態を、構造的に考えるためにここでは 2 進法を用いて表してみる。

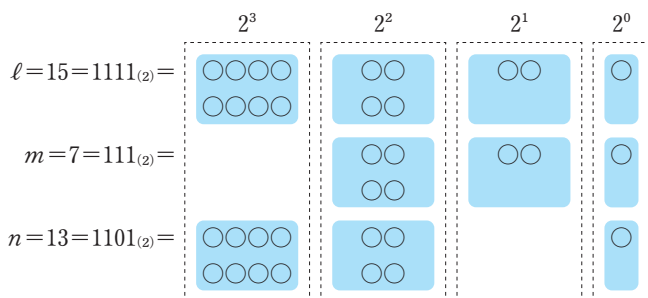
例えば、山の石の数が 13 個の場合、 $13=1101_{(2)}$ であるから、

2^3	2^2	2^1	2^0
○○○○	○○		○
○○○○	○○		

のように、 2^{\bullet} ごとに山を分解して表すことができる。

では、このことを用いて、具体的な3山で考えてみよう。

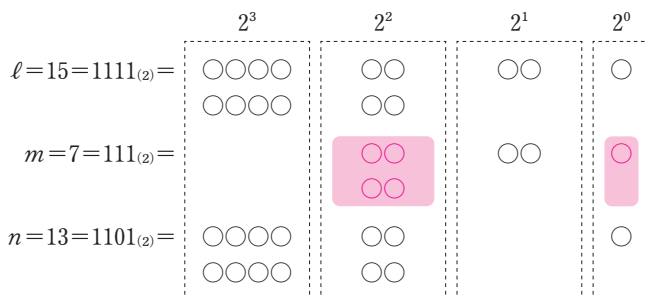
$(\ell, m, n) = (15, 7, 13)$ という状態で自分の番になったとする。これを2進法の山に分解すると、次のようになる。




分解されて、 2^\bullet にいくつの要素が入ったか見てみると、 2^3 には2つ(偶数)、 2^2 には3つ(奇数)、 2^1 には2つ(偶数)、 2^0 には3つ(奇数)になっている。つまり、

$$\begin{matrix} 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

という配置になっている。ここで、奇数になっている部分(2^2 と 2^0)を偶数になるように、変形してみる。つまり、



の  の部分の石を取る。つまり、7個の石の山から5個の石を取って、 $(\ell, m', n) = (15, 2, 13)$ という状態にすると、相手は、

	2^3	2^2	2^1	2^0
$\ell = 15 = 1111_{(2)} =$	○○○○ ○○○○	○○ ○○	○○	○
$m' = 2 = 10_{(2)} =$			○○	
$n = 13 = 1101_{(2)} =$	○○○○ ○○○○	○○ ○○		○

各山の配置を見ると,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となっていて, すべての 2^\bullet の配置がすべて, 2 山のときの後手必勝 (必ず負ける形) になっている. つまり, 相手 (先手) がこの後, どのように石を取ったとしても, 同じように自分の番で必ず負ける形にして相手の番にすれば必ず勝てる.

たとえば, 相手が $\ell = 15$ の山から 9 個とって, $(\ell', m', n) = (6, 2, 13)$ としても,

	2^3	2^2	2^1	2^0
$\ell' = 6 = 110_{(2)} =$		○○ ○○	○○	
$m' = 2 = 10_{(2)} =$			○○	
$n = 13 = 1101_{(2)} =$	○○○○ ○○○○	○○ ○○		○

n 個の山から 9 個をとって, $(6, 2, 4)$ として, 相手の番にすることができる. この後, 相手が, $(5, 2, 4)$ としたら $(5, 1, 4)$ として,
 $(4, 2, 4)$ としたら, $(4, 0, 4)$ として,
 $(3, 2, 4)$ としたら, $(3, 2, 1)$
 として自分の番を終えればよい. (自分で実際にやってみよう.)

このように, 山の数や石の数が増えると, 一見複雑になるように見えるが, 2 進法を用いることで, シンプルな構造にして考えることができる.

Think

例題

293

整数の活用

3点と7点の2種類のクーポン券がそれぞれたくさんある。この2種類のクーポン券を使っていろいろな点数を表すことを考える。ただし、2種類のクーポン券はそれぞれ少なくとも1枚は使うものとする。

今、3点の券を m 枚、7点の券を n 枚使うとすると、

$(m, n) = (1, 1)$ のときは、 $3 + 7 = 10$ (点)、

$(m, n) = (3, 2)$ のときは、 $9 + 14 = 23$ (点)

を表すとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 10点以上、25点以下までで、2種類のクーポン券で表すことができる点数をすべて書き出せ。
- (2) a を定数とする。 a 点以上のすべての点数を2種類のクーポン券で表すことができるとき、その a の最小値を(1)を利用して求め、その理由を答えよ。
- (3) 3点の券を m 枚、7点の券を n 枚使ったとき、(それぞれ少なくとも1枚は使う) 合計点は、次のように表される。

$$3m + 7n \quad (m \geq 1, n \geq 1)$$

$n = 1, 2, 3$ の場合について、(1)を再度考えよ。



考え方

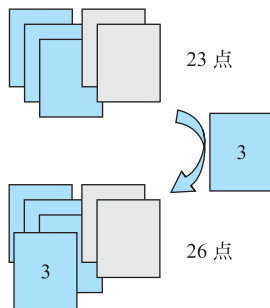
(1)で具体的に数えあげることができるので、そこから(2)以降の状況を推測する。

- (2) 3点のクーポン券が1枚増えると、3点アップする。(7点のクーポン券が1枚増えると、7点アップする。)

この性質が利用できないか考える。

「連続する3つの点数」を2種類のクーポンで表すことができれば、そこに3点のクーポン券を1枚足せばどうなるかを考えるとよい。

- (3) 7点のクーポン券は1枚であるから、3点と7点のクーポン券を使ってできる点を数式で表してみる。



解答 (1)

合計	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
(m, n)	(1, 1)			(2, 1)			(3, 1)	(1, 2)		(4, 1)	(2, 2)		(5, 1)	(3, 2)	(1, 3)	(6, 1)
	○			○			○	○		○	○		○	○	○	○

上の表より, 10点, 13点, 16点, 17点, 19点, 20点, 22点,
23点, 24点, 25点

(2) $a=22$

(理由) (1)より, 21点は表すことができず, 22, 23,
24点と連続した3つの整数は表すことができる。

また, 25点以上を作るのは, 3点のクーポン券を
1枚ずつ加えると, 22, 23, 24 → 25, 26, 27 → 28,
29, 30 → …と「周期3」で表すことができるので
22点以上についてはすべて表すことができる。

3点を1枚足すと, 3
点周期で点数を作れる。

(3) (i) $n=1$ のとき,

$$3m+7n=3m+7=3(m+2)+1 \geq 10$$

(等号は $m=1$ のとき)

よって, 10以上の整数の中で3で割ると1余る
数はすべて表すことができる。(10, 13, 16, 19,
22, ……)

点を数式で表してみる。

(ii) $n=2$ のとき,

$$3m+7n=3m+14=3(m+4)+2 \geq 17$$

(等号は $m=1$ のとき)

よって, 17以上の整数の中で3で割ると2余る
数はすべて表すことができる。(17, 20, 23, 26,
……)

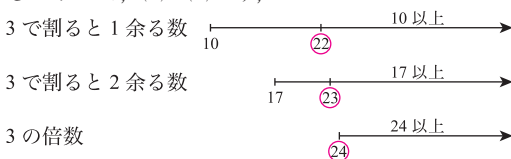
(iii) $n=3$ のとき,

$$3m+7n=3m+21=3(m+7) \geq 24$$

(等号は $m=1$ のとき)

よって, 24以上の整数の中で3で割り切れる数
はすべて表すことができる。(24, 27, 30, 33,
……)

したがって, (i)~(iii)より,



よって, 22以上のすべての点数を表すことができる。

練習**293**

2種類のカードがあり, それぞれ「3」「5」と書かれている。これらのカード
はたくさんある。これらのカードを何枚か取り出して, そのカードに書かれた
数字を足して1つの数にするというゲームを行う。ただし, 使わないカードが
あってもよいものとする。このとき, この2種類のカードでは表すことができ
ない自然数をすべて答えよ。